Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Madrid 2017, Extraordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Opción A. Análisis

Dada la función

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} xe^{2x} & \text{si } x < 0, \\ \frac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si } x \geq 0, \end{cases}}$$

donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) **Estudiar la continuidad y derivabilidad de** $\boldsymbol{f(x)}$ **en** $\boldsymbol{x = 0}$.
b) **Calcular** $\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x)}$ **y** $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x)}$.
c) **Calcular** $\boldsymbol{\int_{-1}^{0} f(x)dx}$.

Solución:

a) **Estudiar la continuidad y derivabilidad de** $\boldsymbol{f(x)}$ **en** $\boldsymbol{x = 0}$.

Continuidad: Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, los límites laterales deben ser iguales y coincidir con el valor de la función en el punto.

- $f(0) = \frac{\ln(0+1)}{0+1} = \frac{\ln(1)}{1} = \frac{0}{1} = 0$.
- Límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} xe^{2x} = 0 \cdot e^0 = 0.$$

- Límite por la derecha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \frac{\ln(1)}{1} = 0.$$

Como $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, la función es continua en $x = 0$.

Derivabilidad: Calculamos las derivadas laterales en $x = 0$.

- Para $x < 0$: $f'(x) = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot e^{2x} \cdot 2 = e^{2x}(1 + 2x)$.

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} e^{2x}(1 + 2x) = e^0(1 + 0) = 1.$$

- Para $x > 0$: $f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1 - \ln(1)}{(1)^2} = \frac{1-0}{1} = 1.$$

Como las derivadas laterales $f'(0^-)$ y $f'(0^+)$ existen y son iguales a 1, la función es derivable en $x = 0$.

$$\boxed{\textbf{La función } \boldsymbol{f(x)} \textbf{ es continua y derivable en } \boldsymbol{x = 0}.}$$

b) **Calcular** $\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x)}$ **y** $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x)}$.

Límite cuando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{2x} = (-\infty) \cdot e^{-\infty} = (-\infty) \cdot 0 \quad \text{(Indeterminación)}$$

Reescribimos como cociente para aplicar L'Hôpital:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-2x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-2e^{-2x}} = \frac{1}{-\infty} = 0.$$

Límite cuando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

c) Calcular $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

Para calcular $\int_{-1}^{0} f(x)dx$, usamos la rama $f(x) = xe^{2x}$ ya que $-1 \leq x < 0$. Integramos por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$. Sea $u = x \implies du = dx$. Sea $dv = e^{2x}dx \implies v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$.

$$\int xe^{2x}dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) = e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right).$$

Aplicamos la regla de Barrow:

$$\int_{-1}^{0} xe^{2x}dx = \left[e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)\right]_{-1}^{0} = \left(e^{0}\left(\frac{0}{2} - \frac{1}{4}\right)\right) - \left(e^{-2}\left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{4}\right)\right) = \left(1\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\right) - \left(e^{-2}\left(-\frac{3}{4}\right)\right) =$$
$$= -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-2}.$$

$$\boxed{\int_{-1}^{0} f(x)dx = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4e^2}}$$

Ejercicio 2. Opción A. Geometría

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 6x - y - z = 1, \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ **y** $r_2 \equiv \begin{cases} 3x - 5y - 2z = 3, \\ 3x + y + 4z = 3, \end{cases}$ **se pide:**

a) **Estudiar la posición relativa de** r_1 **y** r_2.
b) **Calcular la distancia entre las dos rectas.**
c) **Hallar la ecuación del plano que contiene a** r_1 **y al punto** $P(1, 2, 3)$.

Solución:

a) **Estudiar la posición relativa de** r_1 **y** r_2.

Primero, obtenemos un punto y un vector director para cada recta.
Recta r_1*:* Resolvemos el sistema para obtener un punto A..
Sumando las ecuaciones: $8x - 2y = 2 \implies 4x - y = 1$.
Si $x = 0$, $y = -1$.
Sustituyendo en la segunda ecuación: $2(0) - (-1) + z = 1 \implies 1 + z = 1 \implies z = 0$.
Un punto de r_1 es $A(0, -1, 0)$.
El vector director $\vec{v}_1$ es perpendicular a los vectores normales de los planos que definen r_1, $\vec{n}_{1a} = (6, -1, -1)$ y $\vec{n}_{1b} = (2, -1, 1)$.

$$\vec{v}_1 = \vec{n}_{1a} \times \vec{n}_{1b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1 - 1) - \vec{j}(6 - (-2)) + \vec{k}(-6 - (-2)) = (-2, -8, -4).$$

Podemos usar un vector director proporcional: $\vec{v}_1 = (1, 4, 2)$.
Recta r_2*:* Resolvemos el sistema para obtener un punto de la recta.
Restando las ecuaciones: $-6y - 6z = 0 \implies y = -z$. Si $z = 0$, $y = 0$.
Sustituyendo en la segunda ecuación: $3x + 0 + 4(0) = 3 \implies 3x = 3 \implies x = 1$.
Un punto de r_2 es $B(1, 0, 0)$.
El vector director $\vec{v}_2$ es perpendicular a los vectores normales $\vec{n}_{2a} = (3, -5, -2)$ y $\vec{n}_{2b} = (3, 1, 4)$.

$$\vec{v}_2 = \vec{n}_{2a} \times \vec{n}_{2b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -5 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}(-20 - (-2)) - \vec{j}(12 - (-6)) + \vec{k}(3 - (-15)) = (-18, -18, 18).$$

Podemos usar un vector director proporcional: $\vec{v}_2 = (1, 1, -1)$.
Estudio de la posición: Comprobamos si los vectores directores $\vec{v}_1 = (1, 4, 2)$ y $\vec{v}_2 = (1, 1, -1)$ son proporcionales:
$\frac{1}{1} \neq \frac{4}{1}$.
No son paralelos, por lo tanto, las rectas se cortan o se cruzan.
Formamos el vector $\vec{AB} = B - A = (1 - 0, 0 - (-1), 0 - 0) = (1, 1, 0)$.
Calculamos el producto mixto $[\vec{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2]$:

$$[\vec{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-4 - 2) - 1(-1 - 2) + 0(1 - 4) = -6 - (-3) = -3.$$

Como el producto mixto es distinto de cero, los tres vectores son linealmente independientes y las rectas se cruzan.

$$\boxed{\textbf{Las rectas } r_1 \textbf{ y } r_2 \textbf{ se cruzan.}}$$

b) Calcular la distancia entre las dos rectas.

La distancia entre dos rectas que se cruzan $r_1(A, \vec{v}_1)$ y $r_2(B, \vec{v}_2)$ se calcula mediante la fórmula:

$$d(r_1, r_2) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2]|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}.$$

Ya hemos calculado el producto mixto: $|[\vec{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2]| = |-3| = 3$. Calculamos el producto vectorial $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-4-2) - \vec{j}(-1-2) + \vec{k}(1-4) = (-6, 3, -3).$$

Calculamos su módulo:

$$|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = |(-6, 3, -3)| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{36+9+9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$$

La distancia es:

$$d(r_1, r_2) = \frac{3}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{d(r_1, r_2) = \frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{u}}}$$

c) Hallar la ecuación del plano que contiene a $\boldsymbol{r_1}$ y al punto $\boldsymbol{P(1,2,3)}$.

El plano π buscado está determinado por un punto de r_1, por ejemplo $A(0, -1, 0)$, el vector director de r_1, $\vec{v}_1 = (1, 4, 2)$, y el vector $\vec{AP} = P - A = (1-0, 2-(-1), 3-0) = (1, 3, 3)$.
Comprobamos que $\vec{v}_1$ y $\vec{AP}$ no son paralelos: $\frac{1}{1} \neq \frac{4}{3}$.
Son linealmente independientes.
La ecuación del plano π es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ AP_x & AP_y & AP_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - (-1) & z - 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(12-6) - (y+1)(3-2) + z(3-4) = 0$$

$$6x - (y+1)(1) + z(-1) = 0$$

$$6x - y - 1 - z = 0$$

$$6x - y - z - 1 = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{\pi \equiv 6x - y - z - 1 = 0}}$$

Ejercicio 3. Opción A. Álgebra

Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro (%)	Plata (%)
A	**100**	**0**
B	**75**	**15**
C	**60**	**22**

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72% de oro y una proporción del 16% de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determínense las cantidades x, y, z.

Solución:

Determínense las cantidades x, y, z.

Sean x, y, z los gramos de las aleaciones A, B y C respectivamente.

1. **Masa total:** La suma de las masas debe ser 25 gramos.

$$x + y + z = 25$$

2. **Masa de Oro:** El lingote final de 25 g debe tener un 72% de oro. La masa de oro total es $0.72 \times 25 = 18$ gramos. El oro proviene de cada aleación:

- Aleación A (100% oro): $1.00 \cdot x = x$ gramos de oro.
- Aleación B (75% oro): $0.75 \cdot y$ gramos de oro.
- Aleación C (60% oro): $0.60 \cdot z$ gramos de oro.

La ecuación para el oro es:

$$x + 0.75y + 0.60z = 18$$

3. **Masa de Plata:** El lingote final de 25 g debe tener un 16% de plata. La masa de plata total es $0.16 \times 25 = 4$ gramos. La plata proviene de cada aleación:

- Aleación A (0% plata): $0.00 \cdot x = 0$ gramos de plata.
- Aleación B (15% plata): $0.15 \cdot y$ gramos de plata.
- Aleación C (22% plata): $0.22 \cdot z$ gramos de plata.

La ecuación para la plata es:

$$0.15y + 0.22z = 4$$

Tenemos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + z = 25 \\ x + 0.75y + 0.60z = 18 \\ 0.15y + 0.22z = 4 \end{cases}$$

Multiplicando la segunda y tercera ecuación por 100 para eliminar decimales:

$$\begin{cases} x + y + z = 25 \\ 100x + 75y + 60z = 1800 \\ 15y + 22z = 400 \end{cases}$$

Aplicamos el Teorema de Rouché-Frobenius. La matriz ampliada es:

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 100 & 75 & 60 & 1800 \\ 0 & 15 & 22 & 400 \end{array} \right)$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes A:

$$\begin{aligned}|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 100 & 75 & 60 \\ 0 & 15 & 22 \end{vmatrix} \\ &= 1(75 \cdot 22 - 60 \cdot 15) - 1(100 \cdot 22 - 60 \cdot 0) + 1(100 \cdot 15 - 75 \cdot 0) \\ &= 1(1650 - 900) - 1(2200) + 1(1500) \\ &= 750 - 2200 + 1500 \\ &= 50\end{aligned}$$

Como $|A| = 50 \neq 0$, el rango de A es 3 ($\mathrm{Rg}(A) = 3$). El rango de la matriz ampliada A^* también es 3 ($\mathrm{Rg}(A^*) = 3$), y coincide con el número de incógnitas (3). Por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es Compatible Determinado (S.C.D.).

$$\boxed{\textbf{Como } |A| = 50 \neq 0: \textbf{ S.C.D. (1 solución)}}$$

Resolvemos el sistema usando la Regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 25 & 1 & 1 \\ 1800 & 75 & 60 \\ 400 & 15 & 22 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{25(1650 - 900) - (39600 - 24000) + (27000 - 30000)}{50} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 25 & 1 \\ 100 & 1800 & 60 \\ 0 & 400 & 22 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1(39600 - 24000) - 25(2200) + 1(40000)}{50} = 12$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 25 \\ 100 & 75 & 1800 \\ 0 & 15 & 400 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1(30000 - 27000) - 1(40000) + 25(1500)}{50} = 10$$

Comprobamos la masa total: $x + y + z = 3 + 12 + 10 = 25$. Correcto.

Las cantidades son $x = 3$ gramos de A, $y = 12$ gramos de B, y $z = 10$ gramos de C.

$$\boxed{\textbf{Se necesitan } \boldsymbol{x = 3} \textbf{ gramos de A, } \boldsymbol{y = 12} \textbf{ gramos de B y } \boldsymbol{z = 10} \textbf{ gramos de C.}}$$

Ejercicio 4. Opción A. Probabilidad

Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que $p(A) = \frac{4}{9}$, $p(B) = \frac{1}{2}$ y $p(A \cup B) = \frac{2}{3}$, se pide:

a) **Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.**
b) **Calcular $p(\overline{A}|B)$ donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario de A.**

Solución:

a) **Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.**

Dos sucesos A y B son independientes si y solo si $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. Primero, calculamos $p(A \cap B)$ usando la fórmula de la probabilidad de la unión:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$\frac{2}{3} = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} - p(A \cap B)$$
$$p(A \cap B) = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$$

Encontramos un denominador común (18):

$$p(A \cap B) = \frac{4 \cdot 2}{18} + \frac{1 \cdot 9}{18} - \frac{2 \cdot 6}{18} = \frac{8 + 9 - 12}{18} = \frac{5}{18}.$$

Ahora, calculamos el producto $p(A) \cdot p(B)$:

$$p(A) \cdot p(B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}.$$

Comparamos los resultados:

$$p(A \cap B) = \frac{5}{18} \quad \text{y} \quad p(A) \cdot p(B) = \frac{4}{18}.$$

Como $p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B)$, los sucesos A y B no son independientes.

$$\boxed{\textbf{Los sucesos A y B NO son independientes.}}$$

b) **Calcular $p(\overline{A}|B)$ donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario de A.**

La probabilidad condicionada se define como:

$$p(\overline{A}|B) = \frac{p(\overline{A} \cap B)}{p(B)}$$

Sabemos que $p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B)$. Ya calculamos $p(A \cap B) = \frac{5}{18}$.

$$p(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{5}{18} = \frac{9}{18} - \frac{5}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}.$$

Ahora calculamos la probabilidad condicionada:

$$p(\overline{A}|B) = \frac{p(\overline{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{2/9}{1/2} = \frac{2}{9} \cdot 2 = \frac{4}{9}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{p(\overline{A}|B) = \frac{4}{9}}}$$

Ejercicio 1. Opción B. Álgebra

Dada la matriz $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$ **y la matriz identidad** $\boldsymbol{I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$, **se pide:**

a) **Calcular la matriz** $\boldsymbol{B = (A - I)(2I + 2A)}$.
b) **Determinar el rango de las matrices** $\boldsymbol{A - I, A^2 - I}$ **y** $\boldsymbol{A^3 - I}$.
c) **Calcular la matriz inversa de** $\boldsymbol{A^6}$, **en caso de que exista.**

Solución:

a) **Calcular la matriz** $\boldsymbol{B = (A - I)(2I + 2A)}$.

Podemos simplificar la expresión: $B = (A - I) \cdot 2(I + A) = 2(A - I)(A + I) = 2(A^2 - I^2) = 2(A^2 - I)$.
Calculamos A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos $A^2 - I$:

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, calculamos $B = 2(A^2 - I)$:

$$B = 2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

b) **Determinar el rango de las matrices** $\boldsymbol{A - I, A^2 - I}$ **y** $\boldsymbol{A^3 - I}$.

Rango de $A - I$*:*

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que la tercera fila es la opuesta de la segunda ($F_3 = -F_2$). El rango no es 3. El menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Por lo tanto, $\text{Rg}(A - I) = 2$.

Rango de $A^2 - I$*:* Calculamos esta matriz en el apartado a):

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene solo una fila no nula. Por lo tanto, $\text{Rg}(A^2 - I) = 1$.

Rango de $A^3 - I$: Calculamos $A^3 = A^2 \cdot A$:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora $A^3 - I$:

$$A^3 - I = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

De nuevo, la tercera fila es la opuesta de la segunda ($F_3 = -F_2$). El rango no es 3. El menor $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$. Por lo tanto, $\text{Rg}(A^3 - I) = 2$.

$$\boxed{\mathbf{Rg}(\boldsymbol{A - I}) = \mathbf{2}, \quad \mathbf{Rg}(\boldsymbol{A^2 - I}) = \mathbf{1}, \quad \mathbf{Rg}(\boldsymbol{A^3 - I}) = \mathbf{2}}$$

c) Calcular la matriz inversa de $\boldsymbol{A^6}$, en caso de que exista.

Una matriz tiene inversa si su determinante es distinto de cero. La inversa de A^6 es $(A^6)^{-1} = (A^{-1})^6$. Calculamos $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2(0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = 2(-1) = -2.$$

Como $|A| = -2 \neq 0$, la matriz A tiene inversa. El determinante de A^6 es $|A^6| = |A|^6 = (-2)^6 = 64$. Como $|A^6| = 64 \neq 0$, la matriz A^6 tiene inversa.

Calculamos A^6: Observamos que $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $A^4 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A^5 = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $A^6 = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos la inversa de A^6 usando la fórmula $(A^6)^{-1} = \frac{1}{|A^6|}\text{Adj}(A^6)^t$. $|A^6| = 64$.

$$\text{Adj}(A^6) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Adj}(A^6)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}.$$

$$(A^6)^{-1} = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{(A^6)^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/64} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2. Opción B. Análisis

Se considera la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$, y se pide:

a) **Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.**
b) **Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.**
c) **Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.**

Solución:

a) **Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.**

La ecuación de la recta tangente en $x = a$ tiene por expresión $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.
Calculamos $f(0)$:

$$f(0) = \frac{e^{-0}}{0^2+1} = \frac{1}{1} = 1.$$

El punto de tangencia es $(0, 1)$. Calculamos la derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2+1) - e^{-x}(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-e^{-x}(x^2+1+2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)^2}{(x^2+1)^2}.$$

Evaluamos la derivada en $x = 0$:

$$f'(0) = \frac{-e^{0}(0+1)^2}{(0^2+1)^2} = \frac{-1 \cdot 1^2}{1^2} = -1.$$

La pendiente de la recta tangente es $m = -1$. La ecuación de la recta tangente es:

$$y - 1 = -1(x - 0) \implies y - 1 = -x \implies y = -x + 1.$$

$$\boxed{y = -x + 1}$$

b) **Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.**

Asíntotas Verticales: El denominador $x^2 + 1$ nunca es cero para $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, la función no tiene asíntotas verticales.

Asíntotas Horizontales: Calculamos los límites en $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x(x^2+1)} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Hay una asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

Aplicamos L'Hôpital dos veces:

$$\xrightarrow{\text{L'H}} \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{2x} = \left(\frac{-\infty}{-\infty}\right) \xrightarrow{\text{L'H}} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{2} = \frac{+\infty}{2} = +\infty.$$

No hay asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

Asíntotas Oblicuas: Solo podría haber asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^3+x} = \left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)$$

Aplicamos L'Hôpital repetidamente:

$$\xrightarrow{\text{L'H}} \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{3x^2+1} \xrightarrow{\text{L'H}} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{6x} \xrightarrow{\text{L'H}} \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{6} = \frac{-\infty}{6} = -\infty.$$

Como m no es un número real finito, no hay asíntota oblicua.

$$\boxed{\textbf{Asíntota horizontal: } y = 0 \textbf{ (cuando } x \to +\infty\textbf{). No hay asíntotas verticales ni oblicuas.}}$$

c) **Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.**

Calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x+1)^2}{(x^2+1)^2}.$$

Igualamos a cero para encontrar puntos críticos: $f'(x) = 0 \implies (x+1)^2 = 0 \implies x = -1$. El denominador $(x^2+1)^2$ es siempre positivo. e^{-x} es siempre positivo. $(x+1)^2$ es siempre ≥ 0. Estudiamos el signo de $f'(x)$ en los intervalos definidos por el punto crítico $x = -1$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$

La función es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1)$ y en $(-1, +\infty)$. Como la derivada es negativa a ambos lados de $x = -1$ (y cero en $x = -1$), no hay cambio de monotonía, por lo tanto, no existen extremos relativos en $x = -1$. La función es decreciente en todo su dominio $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\textbf{La función es decreciente en } (-\infty, +\infty)\textbf{. No tiene extremos relativos.}}$$

Ejercicio 3. Opción B. Geometría

Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3,2,0)$ y $P_2(7,0,2)$. Se pide:

a) **Hallar la distancia del punto $Q(3,5,-3)$ a la recta r.**
b) **Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q.**

Solución:

a) **Hallar la distancia del punto $Q(3,5,-3)$ a la recta r.**

La recta r pasa por $P_1(3,2,0)$ y tiene como vector director $\vec{v} = \vec{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (7-3, 0-2, 2-0) = (4,-2,2)$.
Podemos usar un vector proporcional $\vec{v} = (2,-1,1)$.
Un punto de la recta es $A = P_1(3,2,0)$. El punto exterior es $Q(3,5,-3)$.
Formamos el vector $\vec{AQ} = Q - A = (3-3, 5-2, -3-0) = (0,3,-3)$.
La distancia del punto Q a la recta r se calcula como:

$$d(Q,r) = \frac{|\vec{AQ} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}.$$

Calculamos el producto vectorial:

$$\vec{AQ} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(3\cdot 1 - (-3)\cdot(-1)) - \vec{j}(0\cdot 1 - (-3)\cdot 2) + \vec{k}(0\cdot(-1) - 3\cdot 2)$$

$$= \vec{i}(3-3) - \vec{j}(0+6) + \vec{k}(0-6) = (0,-6,-6).$$

Calculamos su módulo:

$$|\vec{AQ} \times \vec{v}| = |(0,-6,-6)| = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Calculamos el módulo del vector director:

$$|\vec{v}| = |(2,-1,1)| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}.$$

La distancia es:

$$d(Q,r) = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = 6\sqrt{\frac{2}{6}} = 6\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{d(Q,r) = 2\sqrt{3}u}}$$

b) **Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q.**

Sea π el plano perpendicular a r que pasa por $Q(3,5,-3)$.
El vector normal al plano π es el vector director de la recta r, $\vec{n}_\pi = \vec{v} = (2,-1,1)$.
La ecuación del plano π es de la forma $2x - y + z + D = 0$.
Como $Q(3,5,-3)$ pertenece a π, debe cumplir su ecuación:

$$2(3) - (5) + (-3) + D = 0 \implies 6 - 5 - 3 + D = 0 \implies -2 + D = 0 \implies D = 2.$$

La ecuación del plano es $\pi \equiv 2x - y + z + 2 = 0$.

Para hallar el punto de corte M entre la recta r y el plano π, usamos la ecuación paramétrica de r. Usando $P_1(3, 2, 0)$ y $\vec{v} = (2, -1, 1)$:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases}$$

Sustituimos las coordenadas paramétricas de r en la ecuación del plano π:

$$2(3 + 2\lambda) - (2 - \lambda) + (\lambda) + 2 = 0$$

$$6 + 4\lambda - 2 + \lambda + \lambda + 2 = 0$$

$$6\lambda + 6 = 0 \implies 6\lambda = -6 \implies \lambda = -1.$$

Sustituimos $\lambda = -1$ en las ecuaciones paramétricas de r para hallar las coordenadas del punto de corte M:

$$x = 3 + 2(-1) = 3 - 2 = 1$$

$$y = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$$

$$z = -1$$

El punto de corte es $M(1, 3, -1)$.

$$\boxed{\textbf{El punto de corte es } \boldsymbol{M(1, 3, -1)}.}$$

Ejercicio 4. Opción B. Geometría

Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,3,-1)$, $B(3,1,0)$ y $C(2,5,1)$ y se pide:

a) **Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.**
b) **Obtener las medidas de sus tres ángulos.**

Solución:

a) **Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.**

Calculamos los vectores que forman los lados del triángulo:

$$\vec{AB} = B - A = (3-1, 1-3, 0-(-1)) = (2,-2,1).$$

$$\vec{AC} = C - A = (2-1, 5-3, 1-(-1)) = (1,2,2).$$

$$\vec{BC} = C - B = (2-3, 5-1, 1-0) = (-1,4,1).$$

Calculamos las longitudes de los lados (módulos de los vectores):

$$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3.$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3.$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{(-1)^2+4^2+1^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Como dos lados tienen la misma longitud ($|\vec{AB}| = |\vec{AC}| = 3$) y el tercero es diferente ($|\vec{BC}| = 3\sqrt{2}$), el triángulo es isósceles.

$$\boxed{\textbf{El triángulo es Isósceles.}}$$

b) **Obtener las medidas de sus tres ángulos.**

Usamos el producto escalar para calcular los ángulos. *Ángulo en A (α):* Formado por $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|} = \frac{(2,-2,1)\cdot(1,2,2)}{3\cdot 3} = \frac{2(1)+(-2)(2)+1(2)}{9} = \frac{2-4+2}{9} = \frac{0}{9} = 0.$$

$$\alpha = \arccos(0) = 90^\circ.$$

El triángulo es rectángulo en A.

Ángulo en B (β): Formado por $\vec{BA} = -\vec{AB} = (-2,2,-1)$ y $\vec{BC} = (-1,4,1)$.

$$\cos\beta = \frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|\vec{BA}||\vec{BC}|} = \frac{(-2,2,-1)\cdot(-1,4,1)}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{(-2)(-1)+2(4)+(-1)(1)}{9\sqrt{2}} = \frac{2+8-1}{9\sqrt{2}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ.$$

Ángulo en C (γ): Formado por $\vec{CA} = -\vec{AC} = (-1,-2,-2)$ y $\vec{CB} = -\vec{BC} = (1,-4,-1)$. Como es un triángulo isósceles con $|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$, los ángulos opuestos a estos lados deben ser iguales, es decir, $\beta = \gamma$. Por lo tanto, $\gamma = 45^\circ$. Comprobación: La suma de los ángulos es $90^\circ + 45^\circ + 45^\circ = 180^\circ$.

$$\boxed{\textbf{Los ángulos son } \boldsymbol{\alpha = 90^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 45^\circ}.}$$